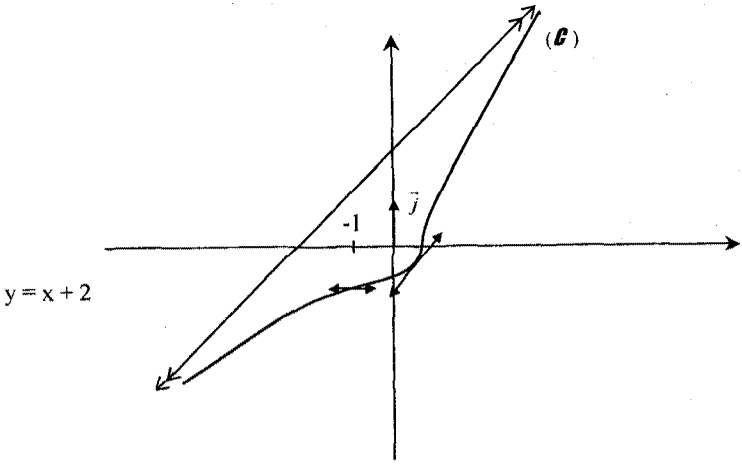
c) Soit $k(x)=f(x)-(x-\frac{2}{3})=\frac{8x^2}{3(x^2+3)}\geq 0$ donc $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T).



B. 1°/ Pour $n=0$ on a : $u_0=\frac{-1}{2}$ d'où $-1\leq u_0\leq 0$.

Soit $n\in\mathbf{N}$, supposons que $-1\leq u_n\leq 0$ et montrons que $-1\leq u_{n+1}\leq 0$.

On a : $\begin{cases}-1\leq u_n\leq 0\\ \text{et } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R}\end{cases}$, donc :

$f(-1)\leq f(u_n)\leq f(0)$ or $f(-1)=-1$ et $f(0)=\frac{-2}{3}$

d'où $-1\leq u_{n+1}\leq\frac{-2}{3}\leq 0$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N}$, $-1\leq u_n\leq 0$.

2°/ $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+2u_n^2+3u_n-3}{u_n^2+3}-u_n=\frac{2(u_n-1)(u_n+1)}{u_n^2+3}$

or $-1\leq u_n\leq 0\Rightarrow u_n-1<0$ et $u_n+1\geq 0$ donc $\forall n\in\mathbf{N}$, $u_{n+1}-u_n\leq 0$.

Conclusion : (u_n) est une suite décroissante.